TD n°5: Séries de Laurent, fonctions méromorphes et résidus

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Singularités, fonctions méromorphes

Exercice 1. Types de singularités.
Déterminer, pour les couples f, S suivants, les types des singularités (apparente, essentielle, pôle d'ordre n) de f en $s \in S$:

1. $\frac{z}{e^z-1}$ a un pôle d'ordre 1 en $2i\pi n$, $n \neq 0$, une singularité apparente en 0 et une singularité essentielle en ∞.

2. $\sin(z)$ a une singularité essentielle en ∞ (par exemple, elle est bornée le long de l'axe réel mais diverge vers l'infini le long de l'axe imaginaire).

3. Pour $a \in \mathbb{C}$ tel que $Q(a) = 0$, on distingue plusieurs cas :

   (a) $P(a) \neq 0$: P/Q a alors un pôle d'ordre la multiplicité de a comme racine de Q.

   (b) $P(a) = 0$ et l'ordre $v_a(P)$ de a comme racine de P est strictement inférieur à l'ordre $v_a(Q)$ de a comme racine de Q : P/Q a un pôle d'ordre $v_a(Q) - v_a(P)$

   (c) $P(a) = 0$ et $v_a(P) \geq v_a(Q)$: P/Q a une singularité apparente en a.

   Reste à traiter le cas de ∞ :
   $$\frac{P(1/w)}{Q(1/w)} = \frac{w^{-\deg(P)}\tilde{P}(w)}{w^{-\deg(Q)}\tilde{Q}(w)}$$
   où $\tilde{P}, \tilde{Q}$ sont des polynômes ne s'annulant pas en zéro. On déduit de cette formule que si $\deg(P) > \deg(Q)$, on a un pôle d'ordre $\deg(P) - \deg(Q)$ et sinon on a une singularité apparente.

4. Une fonction entière à croissance polynomiale est une fonction polynomiale, donc une fonction entière non-polynomiale a forcément une singularité essentielle à l'infini.

Exercice 2. Fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus S$.
On procède par récurrence sur $|S|$. Si $S = \emptyset$, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus S$ est une fonction entière. Pour la récurrence, on écrit $S = S' \cup \{a\}$. On sait qu'au voisinage de a, f s'écrit

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$$

où le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_{-n} z^n$ est infini : on définit donc $\psi_a(z) = \sum_{n \geq 0} a_{-n} z^n$ et $f(z) - \psi_a(1/(z-a))$ n'a plus qu'une singularité apparente en a et se prolonge donc en fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{S}'$. On conclut par récurrence.
Pour que f soit méromorphe au voisinage de a, il faut et il suffit que ψ_a soit un polynôme.

Exercice 3. Fonctions méromorphes sur un ouvert non-connexe.
Il suffit de vérifier que le morphisme donné est un isomorphisme d'anneaux. Si $f|_{U_i} = 0$ pour tout i alors $f = 0$ car f restreinte au complémentaire de son lieu polaire est une fonction holomorphe.
Reste à voir la surjectivité, mais clairement si f_i est une fonction méromorphe sur U_i, on peut définir une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(U)$ par $f(z) = f_i(z)$ si $z \in U_i$ n'est pas un pôle de f. On a ainsi défini une fonction holomorphe sur $U \setminus S$ avec S discret dans U, et f vérifie les conditions de croissance pour être méromorphe au voisinage de chaque point de S.

Théorème des résidus

Exercice 4. Quelques calculs.

1. On fait le développement de f au voisinage de a : on a $f(z) = (z-a)f'(a) + (z-a)^2 g(z)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(z)} &= \frac{1}{(z-a)} \cdot \frac{1}{f'(a) + (z-a)g(z)} \\ &= \frac{1}{(z-a)} \cdot \frac{1}{f'(a)} \cdot \left(1 - \frac{(z-a)g(z)}{f'(a)} + \frac{(z-a)^2 g(z)^2}{f'(a)^2} + ...\right)\end{aligned}$$

   Le terme de degré -1 de cette série est clairement $\frac{1}{f'(a)}$.

2. On a une fonction de la forme précédente, avec $f(z) = z^n - 1$, qui a n racines simples, notons-les ζ^k avec $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Le résidu en ζ^k est donc $\frac{1}{f'(\zeta^k)} = \frac{1}{n\zeta^{nk-k}} = \frac{\zeta^k}{n}$.

3. $\cot(z) = \frac{1}{\tan(z)}$ a des pôles simples aux $n\pi$. La dérivée de $\tan(z)$ est $1 + \tan^2(z)$. Comme $\tan(n\pi) = 0$, on trouve un résidu de 1 en chaque pôle.

4. On écrit, au voisinage de a :

$$f(z) = \sum_{k \geq -n} a_k (z-a)^k$$

   Ainsi, $(z-a)^n f(z) = \sum_{k\geq 0} a_{k-n}(z-a)^k$. Le coefficient de z^{n-1} dans cette série est a_{-1}, le résidu de f en a. Le reste découle de la formule de Taylor.

Exercice 5. Autour des résidus.
On fixe f une fonction holomorphe au voisinage de $a \in \mathbb{C}$ et g une fonction méromorphe au voisinage de a.

1. C'est un cas particulier de la question suivante.

2. On fait le produit de Cauchy des deux séries, on a

$$f(z)g(z) = \sum_{k \geq -n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) (z-a)^k$$

   et on peut vérifier que le terme de degré -1 est bien celui annoncé par l'énoncé.

Exercice 6. Résidus de fractions rationnelles.
Soient $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ une fraction rationnelle de degré $\deg(f) \leq -2$ (où $\deg(f) = \deg(p) - \deg(q)$ si $f = p/q$).

1. On intègre f sur un cercle de rayon R supérieur au maximum des modules des pôles de f, on a

$$2i\pi \sum_a \mathrm{Res}_a(f) = 0 = \int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) iRe^{\theta} d\theta.$$

   Comme $\deg(f) \leq -2$, $f(Re^{i\theta})$ est un $O(R^{-2})$ quand $R \to \infty$, et donc cette intégrale tend vers 0 quand $R \to \infty$.

2. On intègre f sur le contour donné par le segment $[-R, R]$ et l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, et on obtient :

$$2i\pi \sum_{\Im(a)>0} \mathrm{Res}_a(f) = \int_{-R}^{R} f(t)dt + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) iRe^{\theta} d\theta.$$

   La première intégrale converge vers $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt \in \mathbb{R}$, et la deuxième vers 0 (pour les mêmes raisons que dans la question précédente). On en déduit que $2i\pi \sum_{\Im(a)>0} \mathrm{Res}_a(f) \in \mathbb{R}$, et donc

$$\sum_{\Im(a)>0} \mathrm{Res}_a(f) \in i\mathbb{R}.$$

3. $f(z) = 1/z$ n'a qu'un seul résidu en 0, égal à 1. $g(z) = \frac{z}{z^2+1}$ a $\frac{1}{2}$ pour résidu en i et en $-i$.

4. On écrit $f(z) = P(z)/Q(z)$, et donc
$$f(1/w) = \frac{w^{-\deg(P)}\tilde{P}(w)}{w^{-\deg(Q)}\tilde{Q}(w)}$$
a un zéro d'ordre $\deg(Q) - \deg(P) = -\deg(f)$ en ∞. Il en découle que $w^{-2}f(1/w)$ a un zéro d'ordre $-\deg(f) - 2$.

5. Le point crucial ici est de remarquer que
$$\int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} f(z)dz = \int_{\partial\mathbb{D}(0,1/R)} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw.$$
On peut le remarquer directement en écrivant explicitement les intégrales en fonction d'un paramètre θ. La première intégrale s'évalue, pour R assez grand, à $\sum_a \mathrm{Res}_a(f)$, et la deuxième à $-\mathrm{Res}_\infty(f)$, d'où l'égalité.

Note sur le changement de coordonnée pour l'intégration.
Supposons que $\varphi : U \to V$ est une fonction holomorphe entre deux ouverts de $\mathbb{C}$, et $\gamma : [0,1] \to U$ est un lacet C^1 par morceaux dans U. Alors, pour f une fonction holomorphe sur V, on a
$$\int_\gamma f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \int_{\varphi\circ\gamma} f(w)dw.$$
Pour le prouver, il suffit d'écrire explicitement les intégrales dans le paramétrage
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(\varphi(z))\varphi'(z)dz &= \int_0^1 f(\varphi(\gamma(t)))\varphi'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^1 f(\varphi\circ\gamma(t))(\varphi\circ\gamma)'(t)dt \\ &= \int_{\varphi\circ\gamma} f(w)dw.\end{aligned}$$
Dans l'exercice précédent, la formule s'applique à $U = V = \mathbb{C}^*$ et $\varphi(z) = 1/z$ (le $-$ disparaît en raison de l'inversion de l'orientation).

Exercice 7. Nombre de zéros et pôles d'une fonction rationnelle.

1. Remarquons que $v_a(f)$ est l'unique entier k tel que f s'écrit $f(z) = (z-a)^k g(z)$ avec $g(a) \neq 0, \infty$. On a alors, par les propriétés de la dérivée logarithmique,
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1}}{(z-a)^k} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{k}{(z-a)} + h(z)$$
avec h holomorphe au voisinage de a.
Reste à traiter le cas $a = \infty$. $-\deg(f) = k$ signifie que f s'écrit $f(z) = z^{-k}P(z)/Q(z)$ avec P, Q polynômes de même degré. On pose $g(w) = f(1/w)$, on a par la formule ci-dessus $v_\infty(f) = v_0(g)$, et
$$\frac{g'(w)}{g(w)} = -\frac{f'(1/w)}{w^2 f(1/w)}.$$
Le résidu en 0 de ceci est précisément le résidu en l'infini de $\frac{f'}{f}$.

2. On applique le résultat de l'exercice précédent à $\frac{f'}{f}$, et on a
$$0 = \sum_a \mathrm{Res}_a(f'/f) = \sum_a v_a(f).$$

Exercice 8. Reformulation cohomologique des résidus

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $S \subseteq U$ un ensemble fini, et on note $\mathcal{O}(*S)(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U holomorphes sur $U \setminus S$. On considère un lacet C^1 par morceaux $\sigma : [0,1] \to U \setminus S$. On note finalement $d : \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}(U)$ la dérivée.

1. Si f n'a pas de pôle en $a \in U$, alors f' n'a pas non plus de pôle en a, et donc $d\left(\mathcal{O}(*S)(U)\right) \subseteq \mathcal{O}(*S)(U)$ Vérifier que d envoie $\mathcal{O}(*S)(U)$ dans lui-même.

2. Si $g(z) = f'(z)$, alors pour tout $\sigma : [0,1] \to U$ C^1 par morceaux, on a

$$\int_\sigma g(z)dz = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)).$$

Si $\sigma(1) = \sigma(0)$, l'intégrale est donc nulle. La factorisation découle immédiatement de la propriété universelle du quotient.
Détaillons légèrement, on peut définir

$$\int_\sigma : [f] \in H^1_{\mathrm{dR},S}(U) \mapsto \int_\sigma f(z)dz.$$

Si $[f] = [g]$, $f = g + h'$ pour un certain h, et $\int_\sigma f(z)dz = \int_\sigma g(z)dz$, donc l'intégrale ne dépend pas du choix d'un représentant !

3. On développe f en série de Laurent au voisinage de a :

$$d\left(\sum_{k>>-\infty} a_k(z-a)^k\right) = \sum_{k>>-\infty} ka_k(z-a)^{k-1}.$$

Le coefficient de $(z-a)^{-1}$ dans la dérivée est $0a_0 = 0$, donc la dérivée n'a pas de résidu.
Pour la réciproque, on considère $p_a(1/(z-a))$ la partie polaire de z en a, c'est-à-dire l'unique polynôme en $1/(z-a)$ sans terme constant tel que $f(z) - p_a(1/(z-a))$ est holomorphe au voisinage de a. Par conséquent, $f(z) - \sum_z p_a(1/(z-a))$ est holomorphe sur U, et comme U est simplement connexe, elle admet une primitive sur U. Il suffit alors de voir que l'obstruction pour qu'un polynôme en $1/(z-a)$ ait une primitive est précisément son résidu : comme le résidu de p_a en a est précisément le résidu de f en a, f admet une primitive si et seulement si ses résidus sont tous nuls.

4. La question précédente dit que l'application $f \mapsto (\mathrm{Res}_a(f))_{a\,\in S}$ a pour noyau précisément $\mathrm{im}(d)$, et elle est surjective (il suffit de considérer $\sum_a \frac{\alpha_a}{z-a}$). Le premier théorème d'isomorphisme conclut qu'on a

$$H^1_{\mathrm{dR}}(U \setminus S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^S$$

5. Cet isomorphisme identifie le lacet σ, ou plutôt la forme linéaire $\int_\sigma$, à la forme linéaire

$$(\alpha_a)_{a\in S} \mapsto \sum_{a\in S} \mathrm{Ind}_a(\sigma)\alpha_a.$$

Calculs d'intégrales par théorème des résidus

Exercice 9. Une transformée de Fourier.

On remarque avec un changement de variable $x \to -x$ que l'intégrale avec ξ est égale à celle avec $-\xi$. On considère donc $\xi \geq 0$.
On intègre sur le contour donné par le segment $[-R, R]$ et l'arc de cercle donné par $Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$. On calcule le résidu de $\frac{e^{i\xi z}}{1+z^2}$ en i : on obtient $\frac{e^{-\xi}}{2i}$. Le théorème des résidus donne alors

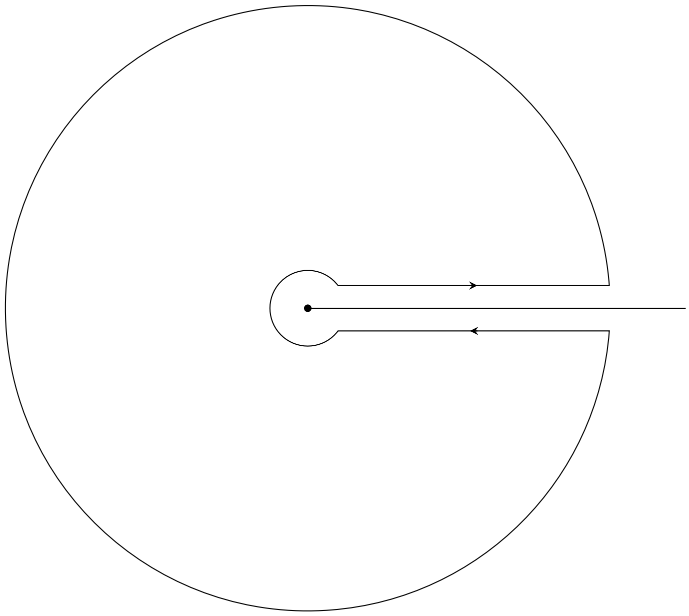
$$\pi e^{-\xi} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}dx + \int_0^\pi \frac{e^{i\xi Re^{i\theta}}}{1+Re^{2i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta.$$

Comme $\xi \geq 0$, on a $\left|{}^{\text{‘}}e^{i\xi Re^{i\theta}}\right| = e^{-R\xi\sin(\theta)} \leq 1$. La deuxième intégrale est donc un $O(R^{-1})$ et tend vers 0 quand $R \to \infty$. On en déduit
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}dx = \pi e^{-\xi}$$
si $\xi \geq 0$, et donc
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}dx = \pi e^{-|\xi|}$$

Exercice 10. Encore une intégrale.
On intègre $\frac{z^{s-1}}{1+z^n}$ (où z^s est compris comme $e^{s\log(z)}$ pour la détermination principale) sur le contour donné par $[\varepsilon, R]$, puis $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi/n$, puis $[Re^{2i\pi/n}, \varepsilon e^{2i\pi/n}]$, puis $\varepsilon e^{i\theta}$, $2\pi/n \geq \theta \geq 0$.
On vérifie que les intégrales sur les arcs de cercles convergent vers 0 quand $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ (la vérification devient habituelle, on ne la fera que lorsqu'elle n'implique pas juste de faire des estimations de grand O). Le théorème des résidus donne donc :
$$2i\pi \mathrm{Res}_{e^{\frac{i\pi}{n}}}\left(\frac{z^{s-1}}{1+z^n}\right) = \int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n}\frac{dx}{x} - e^{\frac{2i\pi s}{n}}\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n}\frac{dx}{x}.$$
On calcule
$$\mathrm{Res}_{e^{\frac{i\pi}{n}}}\left(\frac{z^{s-1}}{1+z^n}\right) = e^{\frac{i\pi(s-1)}{n}}\frac{1}{ne^{\frac{(n-1)i\pi}{n}}} = -\frac{e^{\frac{i\pi s}{n}}}{n}.$$
En multipliant par $e^{-\frac{i\pi s}{n}}$ des deux côtés, on trouve :
$$-2i\sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n}\frac{dx}{x} = -\frac{2i\pi}{n}$$
et on conclut que
$$\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)}$$

Exercice 11. Jamais deux sans trois.
On prend le même contour, le log ne pose pas de problème particulier. Le théorème des résidus donne
$$2i\pi \mathrm{Res}_{e^{\frac{i\pi}{n}}}\left(\frac{z^{s-1}\log(z)}{1+z^n}\right) = \int_0^\infty \frac{x^s\log(x)}{1+x^n}\frac{dx}{x} - e^{\frac{2i\pi s}{n}}\int_0^\infty \frac{x^s\left(\log(x)+\frac{2i\pi}{n}\right)}{1+x^n}\frac{dx}{x}.$$
On peut calculer
$$\mathrm{Res}_{e^{\frac{i\pi}{n}}}\left(\frac{z^{s-1}\log(z)}{1+z^n}\right) = -\frac{i\pi e^{\frac{i\pi s}{n}}}{n^2}.$$
Au final, on trouve
$$\begin{aligned}\frac{2\pi^2}{n^2} &= -2i\sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)\int_0^\infty \frac{x^s\log(x)}{1+x^n}\frac{dx}{x} - \frac{2i\pi}{n}e^{\frac{i\pi s}{n}}\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n}\frac{dx}{x}\\ &= -2i\sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)\int_0^\infty \frac{x^s\log(x)}{1+x^n}\frac{dx}{x} - \frac{2i\pi}{n}e^{\frac{i\pi s}{n}}\frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)}.\end{aligned}$$
On prend la partie imaginaire et on trouve
$$0 = -2\sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)\int_0^\infty \frac{x^s\log(x)}{1+x^n}\frac{dx}{x} - \frac{2\pi^2\cos\left(\frac{\pi s}{n}\right)}{n^2\sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)}.$$
On réarrange et on a finalement
$$\int_0^\infty \frac{x^s\log(x)}{1+x^n}\frac{dx}{x} = -\frac{\pi^2\cos\left(\frac{\pi s}{n}\right)}{n^2\sin^2\left(\frac{\pi s}{n}\right)}.$$
En étant facétieux.se, on aurait aussi pu considérer
$$I(s) = \int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n}\frac{dx}{x}$$
et dériver sous le signe intégral... Cette même méthode vous fournira la correction pour la question bonus.

Exercice 12. Une dernière pour la route.
On considère, pour $\delta > \varepsilon$, le contour donné par le segment $[\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}+i\varepsilon, \sqrt{R^2-\varepsilon^2}+i\varepsilon]$, l'arc de cercle $Re^{i\theta}, \theta \in [\arcsin(\varepsilon/R), 2\pi - \arcsin(\varepsilon/R)]$, le segment $[\sqrt{R^2-\varepsilon^2}-i\varepsilon, \sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}-i\varepsilon]$ et finalement l'arc de cercle $\delta e^{-i\theta}$, $\theta \in [\arcsin(\varepsilon/\delta), 2\pi - \arcsin(\varepsilon/\delta)]$. Le contour ressemble à ça :



Pour δ, ε assez petits et R assez grand, tous les pôles de f sont encerclés par ce contour. On intègre $e^{i\pi s}(-z)^s f(z)$, qui est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ sur ce contour. La difficulté principale est de ne pas se tromper sur la détermination de z^s : On remarque que si $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$, alors $e^{i\pi s}(-z)^s = r^s e^{is\theta}$.
Comme f n'a pas de pôle en 0 et que $\Re(s) > 1$, l'intégrale sur le petit cercle $\gamma_{\delta,\varepsilon}$ se majore comme suit

$$\left| \int_{\gamma_{\delta,\varepsilon}} (-z)^s f(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \int_0^{2\pi} \delta^{\Re(s)} e^{-\Im(s)\theta} \sup_{|z|=\delta} |f(z)| d\theta = \delta^{\Re(s)} C$$

pour C constante indépendante de δ. On peut aussi majorer l'intégrale sur $\gamma_{R,\varepsilon}$ comme suit

$$\left| \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} (-z)^s f(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \int_0^{2\pi} R^{\Re(s)} e^{-\Im(s)\theta} \sup_{|z|=R} |f(z)| d\theta$$

Comme $\deg(f) < -\Re(s)$, $|f(z)| = o\left(|z|^{-\Re(s)}\right)$ quand $|z| \to \infty$, et l'intégrale est un $o(1)$ quand $R \to \infty$. Les deux intégrales qui restent à évaluer sont celles sur les segments horizontaux, qui sont

$$\int_{\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}}^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} e^{i\pi(s-1)}(-x-i\varepsilon)^{s-1} f(x+i\varepsilon)dx, \ \int_{\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}}^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} e^{i\pi(s-1)}(-x+i\varepsilon)^{s-1} f(x-i\varepsilon)dx.$$

Le point crucial ici est que $(-x-i\varepsilon)^{s-1} = e^{-i\pi(s-1)}(x+i\varepsilon)^(s-1)$ et $(-x+i\varepsilon)^{s-1} = e^{i\pi(s-1)}(x-i\varepsilon)^(s-1)$.
En prenant $\varepsilon \to 0$ on trouve :

$$2i\pi \sum_{f(a)=\infty} \mathrm{Res}_a \left(e^{i\pi(s-1)}(-z)^{s-1} f(z) \right) = \int_\delta^R x^s f(x) \frac{dx}{x} - \int_\delta^R e^{2i\pi s} x^s f(x) \frac{dx}{x} + o_{R\to\infty}(1) + o_{\delta\to 0}(1).$$

Comme f n'a que des pôles simples, on a $\mathrm{Res}_a \left(e^{i\pi(s-1)}(-z)^{s-1} f(z) \right) = -e^{i\pi s}(-a)^{s-1}\mathrm{Res}_a(f)$. On prend $\delta \to 0$ et $R \to \infty$, ce qui donne :

$$2i\pi \sum_{f(a)=\infty} -e^{i\pi s}(-a)^{s-1}\mathrm{Res}_a(f) = (1 - e^{2i\pi s}) \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}.$$

En réarrangeant, on a

$$-2i\pi \sum_{f(a)=\infty} (-a)^{s-1}\mathrm{Res}_a(f) = -2i\sin(\pi s)\int_0^\infty x^s f(x)\frac{dx}{x}$$

et donc

$$\int_0^\infty x^s f(x)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \sum_{f(a)=\infty} (-a)^{s-1}\mathrm{Res}_a(f).$$

Soit $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ à pôles simples, sans pôle dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, et $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 < \Re(s) < -\deg(f)$.
Pour $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$, les pôles sont les racines de $1+z+z^2$, donc $e^{\pm 2i\pi/3}$, que l'on note $\omega, \overline{\omega}$. On calcule sans peine

$$\mathrm{Res}_\omega(f) = -\frac{i}{\sqrt{3}}, \mathrm{Res}_{\overline{\omega}}(f) = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

Il ne reste qu'à vérifier que $(-\omega)^s = e^{-i\pi s/3}$ et $(-\overline{\omega})^s = e^{i\pi s/3}$. On obtient finalement :

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x+x^2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{\sin(\pi s)}\frac{i}{\sqrt{3}}\left(-e^{-i\pi(s-1)/3} + e^{i\pi(s-1)/3}\right) = -\frac{2\pi\sin\left(\frac{\pi(s-1)}{3}\right)}{\sqrt{3}\sin(\pi s)}.$$

Exercice 13. Représentation intégrale de la fonction ϑ
Vérifions dans un premier temps que l'intégrale converge : la fonction $x \mapsto \cot(\pi(x+ia))$ est 1-périodique et n'a pas de pôles dans $\mathbb{R}$, elle y est donc bornée. On peut alors estimer

$$\left|e^{i\pi\tau(x+ia)^2}\right| = e^{\Re\left(i\pi\tau(x+ia)^2\right)} = e^{-\Im(\tau)(x^2-a^2)-2\Re(\tau)ax}.$$

Comme $\Im(\tau) > 0$, l'intégrale converge.
La fonction $\cot(\pi z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, à pôles simples dans $\mathbb{Z}$, et son résidu en n est $\frac{1}{\pi}$.
Ainsi, le résidu de $e^{i\pi\tau z^2}\cot(\pi z)$ en n est $\frac{1}{\pi}e^{i\pi n^2\tau}$. De là, on intègre sur le rectangle de coins $\pm(N+1/2) \pm ia$.
Un changement de variable $x \to -x$ donne

$$\int_{-N-1/2}^{N+1/2} e^{i\pi\tau(x+ia)^2}\cot(\pi(x+ia))dx = -\int_{-N-1/2}^{N+1/2} e^{i\pi\tau(x-ia)^2}\cot(\pi(x-ia))dx$$

pour les côtés horizontaux. On estime les intégrales sur les coins verticaux :

$$\left|\int_{-a}^{a} e^{i\pi\tau(N+1/2+it)^2}\cot\left(\frac{\pi}{2}+i\pi t\right)idt\right| \leq 2a \sup_{t\in[-a,a]} e^{\Re\left(i\pi\tau(N+1/2+it)^2\right)} \sup_{t\in[-a,a]} \cot\left(\frac{\pi}{2}+i\pi t\right).$$

On écrit $\tau = u + iv$ avec $v > 0$ et on calcule

$$i\pi\tau(R+it)^2 = \pi(-v+iu)(R^2-t^2+2iRt) = -\pi v(R^2-t^2) - 2uRt.$$

Cette quantité tend vers $-\infty$ quand $R \to \infty$, peu importe $t \in [-a,a]$, et les intégrales sur les côtés verticaux sont donc des $o(1)$. On trouve donc

$$2i\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau n^2} = \int_{\mathbb{R}+ia} e^{i\pi\tau z^2}\cot(\pi z)dz - \int_{\mathbb{R}-ia} e^{i\pi\tau z^2}\cot(\pi z)dz = 2\int_{\mathbb{R}+ia} e^{i\pi\tau z^2}\cot(\pi z)dz.$$